平 成 27 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　　　学

試験時間　　10:00〜12:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
3. 本冊子には第 1 問から第 3 問まである．全問を日本語ないし英語で解答すること．
4. 解答用紙 3 枚が渡される．1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること．解答用紙のおもて面に書ききれないときは，裏面にわたってもよい．
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと．
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

(草稿用白紙)

第 1 問

A, b を以下のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

また，$x = (x_1\ x_2\ x_3)^T$ のスカラー値関数 $f(x)$ の x に関する偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x)$ を

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \quad \frac{\partial}{\partial x_3} f(x) \right)$$

と定義し，$f(x)$ の停留点を $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x) = (0\ 0\ 0)$ となる x と定義する．なお，x^T は x の転置を表すものとする．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 A の特性方程式を記せ．

(2) 行列 C は行列 A と単位行列 I を用いて，$C = A^5 + 9A^4 + 30A^3 + 36A^2 + 30A + 9I$ と表される．行列 C を求めよ．

(3) $x^T Ax$ を x について偏微分せよ．

(4) 任意のベクトル x に対して，$x^T Ax = x^T \tilde{A} x$ が成り立つ対称行列 $\tilde{A}$ を 1 つ求めよ．また，行列 $\tilde{A}$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3)$ と固有ベクトル v_1, v_2, v_3 を求めよ．ただし，固有ベクトルを並べた行列 $V = (v_1\ v_2\ v_3)$ が直交行列となるように固有ベクトルを選べ．

(5) 任意の実ベクトル x に対して，$x^T Ax \leq 0$ が成り立つことを証明せよ．

(6) 関数 $g(x) = x^T Ax + 2b^T x$ の停留点を求めよ．

第 2 問

xy 平面における曲線に関する以下の設問に答えよ．

(1) 楕円：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \ (a>b>0) \qquad (*)$$

と双曲線：

$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{d^2}=1 \ \ (c>d>0) \qquad (**)$$

の焦点の座標が，それぞれ $\left(\pm\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ と $\left(\pm\sqrt{c^2+d^2},0\right)$ となることを示せ．ここで，楕円は焦点からの距離の和が一定，双曲線は焦点からの距離の差が一定となる曲線である．

(2) 式 $(*)$ において，$a^2-b^2=u^2$ (u は正の定数) を満たす楕円の集合 E_u を考える．式 $(*)$ と式 $(*)$ を x で微分した微分方程式を連立させ，E_u に属する任意の楕円が次の微分方程式を満たすことを示せ．

$$xyy'^2+\left(x^2-y^2-u^2\right)y'-xy=0 \qquad (***)$$

ここで，$y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ である．

(3) 式 $(**)$ において，$c^2+d^2=u^2$ を満たす双曲線の集合 H_u を考える．H_u に属する任意の双曲線が式 $(***)$ を満たすことを示せ．

(4) E_u に属するすべての楕円と直交する曲線の集合を C_u とする．C_u から，直線 $x=0$ を除き，さらに $y'=0$ となる点を含む曲線も除いた集合を D_u とする．D_u に属する任意の曲線が満たす微分方程式を求めよ．

(5) 設問 (4) で求めた微分方程式を解け．必要であれば，$\alpha=x^2$, $\beta=y^2$, $p=\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}$ とおき，p に関する微分方程式に書き換えよ．

第 3 問

以下の設問に答えよ．

(1) X を実数値をとる確率変数とし，t を実変数として，$\phi_X(t)$ を

$$\phi_X(t) = E_X[e^{tX}]$$

として定める．ここに，$E_X[\cdot]$ は X に関する期待値を表す．$\phi_X(t)$ が $t=0$ の近傍で有限であるとき，X の平均と分散を $\phi'_X(0)$ と $\phi''_X(0)$ を用いて表せ．ここに，$\phi'_X(t)$，$\phi''_X(t)$ はそれぞれ $\phi_X(t)$ の t に関する 1 階微分，2 階微分を表す．

(2) 互いに独立な確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ に対して，各 X_j が平均 μ，分散 σ^2 の同一の 1 次元正規分布に従うとする．つまり，各 X_j の従う確率密度関数が，

$$p(X_j = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

で与えられるとする．このとき，$\phi_{X_j}(t)$ を求めよ．また，

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

の従う確率分布を求めよ．ただし，一般に，2 つの確率変数 Z と W に対して，t の関数として，$\phi_Z(t) = \phi_W(t)$ であれば，Z と W が従う確率分布は等しいという事実を用いてもよい．

(3) 設問 (2) において，$N \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$ が θ $(0 < \theta < 1)$ をパラメータとする幾何分布に従って発生するとする．つまり，N の確率関数が

$$P(N = n) = (1-\theta)^{n-1}\theta$$

で与えられるとする．このとき，$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ に対して，$\phi_Y(t)$ を

$$\phi_Y(t) = E_Y[e^{tY}]$$

と定めるとき，$\phi_Y(t)$ を求め，それを $\phi_{X_j}(t)$ を用いて表せ．ただし，$\phi_{X_j}(t)$ は j に依らないので，$\phi_X(t)$ と書いてよい．

(4) 設問 (3) の Y の平均と分散を求めよ．

(5) $\xi(> E_Y[Y])$ が与えられたとして， 設問 (3) の Y の値が ξ を超える確率の上界の 1 つを μ, σ, θ, ξ の関数として与えよ (必ずしも μ, σ, θ, ξ 全てを使わなくてもよい)．

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)