

平成 26 年度

大学院入学試験問題

数 学

試験時間 10:00～12:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあつた場合には申し出ること。
3. 本冊子には第1問から第3問までである。全問を日本語ないし英語で解答すること。
4. 解答用紙3枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること。解答用紙のおもて面に書ききれないときは、裏面にわたつてもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係ない記号、符号、文言などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

(草稿用白紙)

第1問

実正方行列 M は、 $M = M^T$ を満たすとき対称行列という。ただし、 M^T は M の転置行列を表す。以下の設問に答えよ。

- (1) 以下の対称行列 A のすべての固有値と、それらの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (2) 実正方行列 M が対称行列ならば、その固有値はすべて実数となることを証明せよ。
(3) 実正方行列 M の固有値がすべて実数であっても M は必ずしも対称行列であるとは限らない。そのような行列 M の具体例を1つ挙げよ。

- (4) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を原点を除く3次元実ベクトルとする。ここで、設問(1)の対称行列 A を用いて、関数 $f(x, y, z)$ を次のように定義する。

$$f(x, y, z) = \frac{\mathbf{u}^T A \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$$

ただし、 \mathbf{u}^T は \mathbf{u} の転置を表す。また、関数 $g(x, y, z)$ を次のように定義する。

$$g(x, y, z) = \frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

このとき、次の関係式が成立つことを示せ。

$$f(x, y, z) = 1 - 2g(x, y, z)$$

- (5) 設問(4)の関数 $g(x, y, z)$ について、次の不等式が成立つことを設問(1)の対称行列 A の固有値分解を用いて示せ。

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq g(x, y, z) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

第2問

区間 $[-1, 1]$ 上で定義された実関数 $f(x), g(x)$ に対して,

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

とおく。以下の設問に答えよ。

- (1) 以下で定義される多項式 $q_0(x), q_1(x), q_2(x)$ に対して $(q_0, q_1), (q_0, q_2), (q_1, q_2), (q_0, q_0), (q_1, q_1), (q_2, q_2)$ を計算せよ。

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x, \quad q_2(x) = 3x^2 - 1$$

ただし、任意の奇関数 $h(x)$ に対して $\int_{-1}^1 h(x)dx = 0$ であることを用いてよい。

- (2) $p_k(x)$ を x の k 次多項式 (ただし、 x^k の項の係数は 0 でないとする) とし、多項式関数の列 $p_0(x), p_1(x), \dots$ を考える。以下では、 N 個の関数の組 $\{p_0(x), p_1(x), \dots, p_{N-1}(x)\}$ が $[0, N-1]$ 内の任意の整数 i, j に対して

$$(p_i, p_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとき、その組は正規直交条件を満たすという。

- (2-1) 設問 (1) で定義した $q_0(x), q_1(x), q_2(x)$ を用いて、正規直交条件を満たす関数の組 $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$ を一つ求めよ。
- (2-2) 関数の組 $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ が正規直交条件を満たすような $p_3(x)$ を一つ求めよ。ただし、 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ は前問 (2-1) で求めたものとする。
- (3) いま、関数の組 $\{p_0(x), p_1(x), \dots, p_{N-1}(x)\}$ が正規直交条件を満たしているとする。このとき小問 (2-2) と同様に、関数の組 $\{p_0(x), p_1(x), \dots, p_N(x)\}$ が正規直交条件を満たすように $p_N(x)$ を定めることができる。次の手順により、この $p_N(x)$ は符号を除いて一意であることを示せ。

- (3-1) 一般に任意の N 次多項式 $f_N(x)$ は

$$f_N(x) = \sum_{k=0}^N c_k p_k(x)$$

と書ける。この係数 c_k ($k = 0, \dots, N$) を $p_0(x), p_1(x), \dots, p_N(x)$ と $f_N(x)$ を用いて表せ。

- (3-2) $p_N(x)$ とは異なる N 次多項式関数 $\tilde{p}_N(x)$ が存在して、関数の組 $\{p_0(x), p_1(x), \dots, p_{N-1}(x), \tilde{p}_N(x)\}$ も正規直交条件を満たしたとする。このとき、前問 (3-1) で $f_N(x) = \tilde{p}_N(x)$ の場合を考えることで $\tilde{p}_N(x) = -p_N(x)$ を示せ。

第3問

独立な確率変数の列 x_0, x_1, x_2, \dots において, 各 x_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) は, 確率 p で 1 の値をとり, 確率 $1-p$ で 0 の値をとるものとする. 以下の設問に答えよ.

(1) 確率変数列 x_0, x_1, x_2, \dots に関して, 以下の小問に答えよ.

(1-1) x_i の分散を求めよ. また, $x_0 = x_1 = 1$ となる確率を求めよ.

(1-2) k ($k \geq 0$) を $x_k = x_{k+1}$ が成り立つ最小の整数とする. たとえば, x_0, x_1, x_2, \dots が $1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, \dots$ ならば $k = 1$ となり $x_k = 0$ となる.

$x_k = 1$ となる確率を求めよ.

(2) 確率変数列 x_0, x_1, x_2, \dots をもとに確率変数列 y_0, y_1, y_2, \dots を以下のように定める.

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_{i+1} &= y_i + \alpha(x_i - y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

ただし, $0 < \alpha < 1$ と仮定する. 以下の小問に答えよ.

(2-1) $y_n = (1-\alpha)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (1-\alpha)^{n-i-1} \alpha x_i$ ($n = 1, 2, \dots$) であることを示せ.

(2-2) y_n の期待値 E_n と分散 V_n を求めよ.

(2-3) $E_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$, $V_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ とおく. $\frac{1}{2} < p < \frac{3}{4}$ であるとき,

$$E_\infty - \sqrt{V_\infty} \geq \frac{1}{2}$$

を満たす α の最大値を求めよ.

(3) 確率変数列 x_0, x_1, x_2, \dots をもとに確率変数列 z_0, z_1, z_2, \dots を以下のように定める. x_0, x_1, x_2, \dots のなかの x_j, x_{j+1} が, $x_j = x_{j+1}$ を満たすもののうちの i 番目であるとき, $z_i = x_j$ と定める. なお, $x_j = x_{j+1}$ を満たす最初のは 0 番目と数え, $z_0 = x_j$ と定める. たとえば, x_0, x_1, x_2, \dots が $1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, \dots$ ならば $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = 1, z_3 = 0, \dots$ となる.

$z_i = 1$ となる確率を q_i としたとき, $\lim_{i \rightarrow \infty} q_i$ を求めよ.

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)