平 成 22 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　　　学

試験時間　　10:00〜12:30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 本冊子には第 1 問から第 3 問まである。全問を日本語ないし英語で解答すること。
4. 解答用紙 3 枚が渡される。1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。解答用紙のおもて面に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係ない記号、符号、文言などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

(草稿用白紙)

第 1 問

以下の (1) から (4) の命題は，整数 $m \geq 2$ に対する $m \times m$ の実行列 A に関して述べたものである．(1)〜(4) のそれぞれの命題がすべての m, A について成立するかどうかを述べ，それを証明せよ．命題が成立しない場合には，反例を具体的にあげて示すこと．なお，(3)，(4) において記号 $\|\cdot\|$ はベクトルのノルムを表す記号で，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1 \ \cdots \ x_m)$ に対して，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}$ である．

(1) A が相異なる m 個の実固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ を持つとき, 対応する固有ベクトルは線形独立である．すなわち，固有値 λ_i に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とするとき，

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0} \quad \text{ならば} \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0 \quad \text{である．}$$

(2) A の固有多項式 $F_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ が重根を持つとき，A は対角化可能でない．ここで，I は $m \times m$ の単位行列を表す.

(3) A が相異なる m 個の実固有値を持つとき，以下で定まるベクトルの列 $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots$ は任意の m 次元実ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して収束する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_0 &= \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{u}_{n+1} &= \begin{cases} A\boldsymbol{u}_n / \|A\boldsymbol{u}_n\| & (\|A\boldsymbol{u}_n\| \neq 0 \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{0} & (\|A\boldsymbol{u}_n\| = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (n = 0, 1, \ldots). \end{aligned}$$

(4) A の固有多項式が m 重根を持ち，それが正の実数のとき，以下で定まるベクトルの列 $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots$ は任意の m 次元実ベクトル$\boldsymbol{b}$に対して収束する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_0 &= \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{u}_{n+1} &= \begin{cases} A\boldsymbol{u}_n / \|A\boldsymbol{u}_n\| & (\|A\boldsymbol{u}_n\| \neq 0 \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{0} & (\|A\boldsymbol{u}_n\| = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (n = 0, 1, \ldots). \end{aligned}$$

第 2 問

以下の各問に答えよ．

(1) 次の不定積分をそれぞれ求めよ．

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$

(2) 図 1 に示される複素平面上の 4 つの経路 S_1, S_2, S_3, S_4 に沿った積分値

$$I_k = \int_{S_k} \frac{1}{z-\alpha}dz,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

をそれぞれ求め，さらに $I = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} I_k$ の値を求めよ．ただし， $\alpha = a+ib$ (a, b は実数, i は虚数単位)， $|a|<1$, $|b|<1$ とする．

(3) 図 1 の 4 つの経路 S_1, S_2, S_3, S_4 を合わせた経路を S とするとき，次の積分値を求めよ．

$$\int_S \frac{2z+0.4}{z^2+0.4z+0.05}dz$$

(4) z の多項式 $f(z)$ が，経路 S 上の任意の点 z に対して $f(z) \neq 0$ であり，

$$\int_S \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$$

を満たすものとする．ただし，$f'(z)$ は $f(z)$ の導関数を表す．このとき，経路 S で囲まれた内部領域 D に対して

$$f(z) \neq 0,\ \forall z \in D$$

であることを示せ．

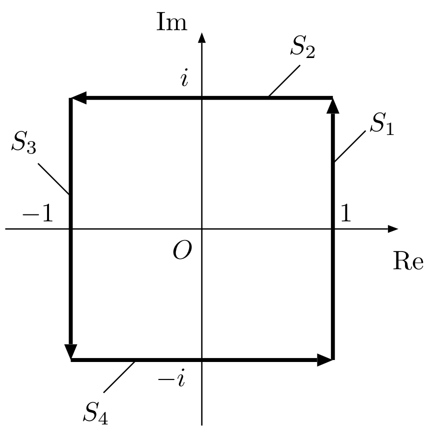

図 1: 複素平面上の経路 S_1, S_2, S_3, S_4

第 3 問

以下の各問に答えよ．

(1) 確率変数 U が開区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従うものとする．確率変数 $X = -\dfrac{1}{\lambda}\log_e U$ (λ は正の定数) の

(i) 累積分布関数 $F(x) = P(X \le x)$

(ii) 確率密度関数 $f(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$

を求めよ．ただし，$P(X \le x)$ は確率変数 X に対して，$X \le x$ が成り立つ確率を表す．

(2) 互いに独立な確率変数 X_i $(i \ge 1)$ が，$x \ge 0$ に対する確率密度関数 $\lambda e^{-\lambda x}$ (λ は正の定数) の分布に従うとき，以下の Y_2, Y_3, Y_n が従う確率分布の確率密度関数を求めよ．

(i) $Y_2 = X_1 + X_2$

(ii) $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$

(iii) $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$

(3) 設問 (2) の確率変数 Y_n に対して，$P(Y_n \ge 1)$ は $Y_n \ge 1$ が成り立つ確率を表すものとする．$n > 1$ に対して，$P(Y_n \ge 1) - P(Y_{n-1} \ge 1)$ を λ と n の式として表せ．

(4) 一様分布に従う乱数を用いて，以下の手続き Q によってある分布に従う乱数を得ることができる．ここで，λ は正の定数である．手続き Q によって得られる K の値が k となる確率 $P(K = k)$ を求めよ．

手続き Q

開区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う乱数列 u_i $(i \ge 1)$ を順次発生させ z_i $(i \ge 1)$ を順に以下のように計算し，初めて $z_n < e^{-\lambda}$ を満たす n に対して $K = n - 1$ とする．

$$
\begin{aligned}
z_1 &= u_1 \\
z_2 &= z_1 u_2 \\
z_3 &= z_2 u_3 \\
&\vdots \\
z_n &= z_{n-1} u_n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)