平 成 18 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　　　　学

試験時間　　10:00〜12:30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 本冊子中の 6 問のうち、任意の 3 問を選んで日本語ないし英語で解答すること。
4. 解答用紙 3 枚が渡される。1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係ない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

(草稿用白紙)

第1問

要素数有限の集合 X と，写像 $f : X \to X$ について考える．非負整数 $i = 0, 1, \ldots$ に対し，f を i 回合成してできる写像を $f^i(x)$ と書くことにする．すなわち，

$$\begin{aligned} f^0(x) &= x \\ f^i(x) &= f(f^{i-1}(x)) \quad (i \geq 1) \end{aligned}$$

と定義する．

集合 $Y \subseteq X$ と，写像 $g : X \to X$ について，

$$g(Y) = Y$$

が成り立つとき，Y は g の不動点であるという．ただし，$g(Y) = \{g(y) \mid y \in Y\}$ とする．

以下の問いに答えよ．

(1) 非負整数 $i = 0, 1, \ldots$ に対し，集合

$$A_i = f^i(X)$$

を定義する．$A_k = A_{k+1}$ なる k が存在することを示せ．

(2) (1) の条件を満たす k の一つを k^* とおく．A_{k^*} は，f のあらゆる不動点を含むことを示せ．

(3) X の要素 x に対し，集合

$$B(x) = \{f^i(x) \mid i \geq k^*\}$$

を定義する．$B(x)$ が f の不動点であることを示せ．

(4) $A_{k^*} = \bigcup_{x \in X} B(x)$ を示せ．

第 2 問

$a_1(t)$, $a_2(t)$ は実数から実数への連続微分可能な関数であるとする． $\begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a}(t)$ と書くことにする． $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ に関する微分方程式の初期値問題

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = -\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{a}(t)^\top \boldsymbol{x}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{a}(t)^\top$ はベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ の転置を表す．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の実数 t に関して $a_1(t) = 1$, $a_2(t) = 0$ であるとき，初期値問題 (2.1) の解 $\boldsymbol{x}(t)$ が $t \to \infty$ の極限で零ベクトルに収束しないことを示せ．

(2) 実数から実数への連続微分可能な関数 $p_1(t)$, $p_2(t)$ を，$p_1(t)^2 + p_2(t)^2 = 1$ を満たすように選ぶとする．行列

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) & p_2(t) \\ -p_2(t) & p_1(t) \end{bmatrix}$$

に基づく変数変換

$$\boldsymbol{y}(t) = P(t)\boldsymbol{x}(t)$$

を使い，初期値問題 (2.1) を $\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式の初期値問題に書き換えよ．

(3) 任意の実数 t に関して $a_1(t) = \cos t$, $a_2(t) = \sin t$ であるとき，初期値問題 (2.1) の解 $\boldsymbol{x}(t)$ が $t \to \infty$ の極限で零ベクトルに収束することを示せ．

(4) $\boldsymbol{a}(t)$ がどのような性質を持てば，初期値問題 (2.1) の解 $\boldsymbol{x}(t)$ が $t \to \infty$ の極限で零ベクトルに収束するかを，(1) および (3) の結果に基づいて予想せよ．また，なぜそのように予想するのかを説明せよ．予想を証明する必要はない．

第 3 問

複素関数

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z - \pi}$$

を，図 3.1 に示す積分路 $C(= C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6)$ に沿って周回積分する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の全ての極とその留数を求めよ．

(2) 次の周回積分を求めよ．

$$\int_C f(z)dz$$

(3) $X_1, Y, X_2 \to +\infty$ のとき，図中の積分路 $C_4 + C_5 + C_6$ における $f(z)$ の積分，

$$\lim_{X_1, Y, X_2 \to +\infty} \int_{C_4+C_5+C_6} f(z)dz$$

を求めよ．

(4) $\rho \to 0$ のとき，図中の積分路 C_2 における $f(z)$ の積分，

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{C_2} f(z)dz$$

を求めよ．

(5) 以下の定積分

$$\lim_{X_1, X_2 \to +\infty,\ \rho \to 0} \left(\int_{-X_2}^{\pi-\rho} \frac{\sin x}{x - \pi} dx + \int_{\pi+\rho}^{X_1} \frac{\sin x}{x - \pi} dx \right)$$

を求めよ．なお，この積分は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x - \pi} dx$$

の主値とよばれる．

(6) a を実数とするとき，以下の定積分

$$\lim_{X_1, X_2 \to +\infty,\ \rho \to 0} \left(\int_{-X_2}^{\pi-\rho} \frac{\sin ax}{x - \pi} dx + \int_{\pi+\rho}^{X_1} \frac{\sin ax}{x - \pi} dx \right)$$

を求めよ．ただし，$a \neq 0$ とする．

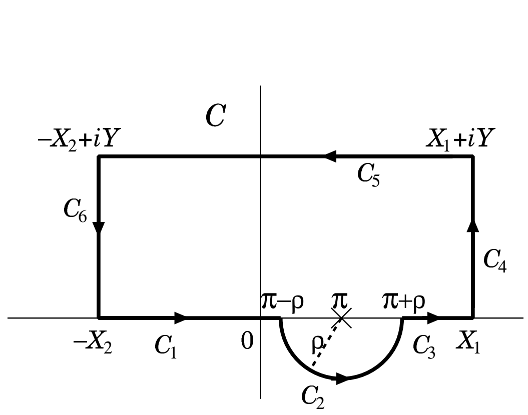

図 3.1

第 4 問

時刻 $t = 0$ に原点 O を出発して数直線上を動く点 P がある．点 P は単位時間ごとに確率 $1/2$ で $+1$，確率 $1/2$ で -1 移動する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 時刻 $t = 2$ に点 P が存在しうる位置と，そこに存在する確率を求めよ．

(2) 時刻 t に点 P が位置 x に存在する確率 $p(x,t)$ を求めよ．

(3) 時刻 t における，点 P の位置 x の平均と分散を求めよ．

(4) $p(x,t)$ は，t が十分に大きく，t と x がともに偶数または奇数のとき，$|x| \leq \sqrt{t}$ において

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\ e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

と近似できることを示せ．また，このように近似できることの解釈を述べよ．ただし，n が十分に大きいとき $n! \simeq \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$ (スターリングの公式)，および，a が十分に小さいとき $\log_e(1+a) \simeq a - \frac{1}{2}a^2$ を用いてよい．

第 5 問

X は $n \times n$ の実対称行列であるとする．特に，任意の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $\boldsymbol{v}^\top X \boldsymbol{v} \geq 0$ となるとき，X は半正定値であるという．ただし，記号 $^\top$ はベクトルや行列の転置を表す．また，$n \times n$ の実対称行列 Y に対して，$\operatorname{tr} XY$ は行列 XY のすべての対角成分の和を表すとする．以下の問いに答えよ．

(1) $n \times n$ の実対称行列 X に対して，$n \times n$ の直交行列 U を適当に選ぶことによって，行列 $U^\top XU$ を対角行列

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

の形にできることが知られている．ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ はそのような U の第 i 列であるとする．このとき $i = 1, 2, \ldots, n$ のそれぞれについて，$\boldsymbol{u}_i$ は X の固有ベクトルであり，λ_i は対応する固有値であることを示せ．

(2) X が半正定値であるとき，そしてそのときに限り，X のすべての固有値が非負の実数であることを示せ．

(3) X が半正定値であるとき，そしてそのときに限り，$X = A^\top A$ を満たす行列 A が存在することを示せ．

(4) X と Y がともに半正定値であるとき，$\operatorname{tr} XY \geq 0$ であることを示せ．

(5) X が半正定値であるとき，そしてそのときに限り，任意の $n \times n$ の半正定値行列 Y に対して $\operatorname{tr} XY \geq 0$ であることを示せ．

第 6 問

以下の問いに答えよ.

(1) 平面上に, 無数の平行線が, 間隔 2 をもってひかれている場合を考える. 図 6.1 のように, 一辺が $\sqrt{2}$ の正方形を, 位置と向きに関して無作為において, この正方形がいずれかの直線と重なる確率を求めよ.

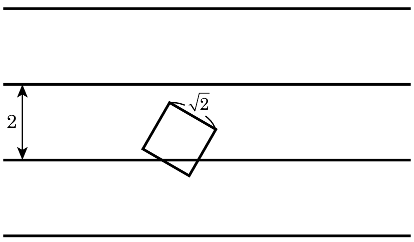

図 6.1

(2) (1) と同様に, 平面上に, 無数の平行線が, 間隔 2 をもってひかれている場合を考える. 図 6.2 のように, 長辺 $\sqrt{3}$, 短辺 1 の長方形を, 位置と向きに関して無作為においたとき, この長方形がいずれかの直線と重なる確率を求めよ.

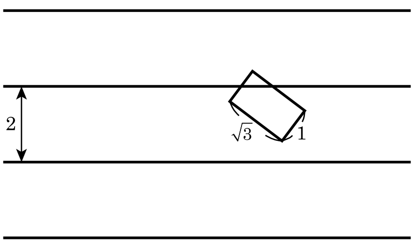

図 6.2

(3) 平面上に, 直交する無数の格子線が間隔 2 をもってひかれている場合を考える. 図 6.3 のように, 長辺 $\sqrt{3}$, 短辺 1 の長方形を, 位置と向きに関して無作為においたとき, この長方形がいずれかの直線と重なる確率を求めよ.

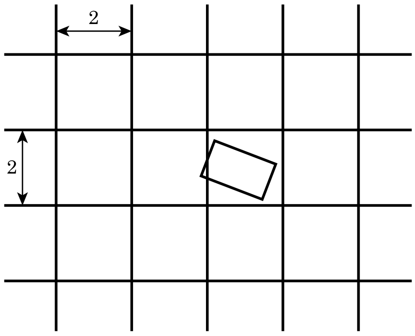

図 6.3

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)