平成15年度

大学院入学試験問題

数学

午後 1:00〜3:30

注意事項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答用紙3枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
4. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
5. 6問のうち、任意の3問を選んで解答すること。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係ない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

A を $m \times n$ 実行列 (ただし $m \geq n$) とする．このとき，A の特異値分解

$$U^\top AV = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$$

が存在することを以下の手順で示せ．ただし記号 $^\top$ は転置を表し，$\mathbf{0}$ は適当な次元の零ベクトルである．Σ は $m \times n$ 実行列，U は $m \times m$ 直交行列，V は $n \times n$ 直交行列である．また，Σ の対角要素 σ_i $(i = 1, \ldots, n)$ は特異値と呼ばれる．

(1) 行列 A の関数 $\sigma(A)$ を

$$\sigma(A) = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|$$

で定義する．ただしベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{x}$ のユークリッドノルムである．また，上記の max を達成する $\boldsymbol{x}$ の存在は仮定して良い．この関数がノルムとしての，以下の性質を満たすことを示せ．すなわち，任意の $m \times n$ 実行列 A, B, 実数 α に対し，

1. $\sigma(A) \geq 0$ であり $\sigma(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
2. $\sigma(\alpha A) = |\alpha|\sigma(A)$,
3. $\sigma(A + B) \leq \sigma(A) + \sigma(B)$.

(2) $\sigma_1 = \sigma(A)$ とする．(1) における仮定より $\sigma_1 \boldsymbol{y}_1 = A\boldsymbol{x}_1$ を満たす単位ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{y}_1$ が存在する．そこで，これらを含む正規直交基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ と $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ を作る．$U_1 = (\boldsymbol{y}_1\ \boldsymbol{y}_2\ \ldots\ \boldsymbol{y}_m)$, $V_1 = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \ldots\ \boldsymbol{x}_n)$ と定義すると，U_1 は $m \times m$ 直交行列，V_1 は $n \times n$ 直交行列である．このとき，

$$A_1 = U_1^\top A V_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \boldsymbol{w}^\top \\ \boldsymbol{z} & A_2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

とおく．$\alpha = \sigma_1, \boldsymbol{z} = \mathbf{0}$ であることを示せ．

(3) 式 $(*)$ の A_1 (ただし $\alpha = \sigma_1, \boldsymbol{z} = \mathbf{0}$) に対し，

$$\left\| A_1 \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix} \right\| \geq \sigma_1^2 + \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w}$$

を示せ．

(4) $\sigma_1 = \sigma(A_1)$ を示せ.

(5) 上記の (3), (4) を用いて，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ.

(6) 式 (*) において $\alpha = \sigma_1, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ とするとき，$\sigma_1 = \sigma(A_1)$ ならば $\sigma(A_1) \geq \sigma(A_2)$ であることを示せ.

(7) 帰納法を用いて，任意の $m \times n$ 行列 $(m \geq n)$ の特異値分解が存在することを証明せよ.

第2問

実関数 $f(x)$ は $f(r)=0$ を満たし，r を含む区間において 4 回微分可能でかつ $f'(x)>0$ を満たすものとする．関数

$$F(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$$

について以下の問に答えよ．

(1) $F'(x)$ を $f(x)$ およびその導関数 (高次を含む) を用いて表せ．

(2) $F''(x)$ を $f(x)$ およびその導関数 (高次を含む) を用いて表せ．

(3) 関数 $G(x)$ を

$$G(x)=x-\frac{F(x)}{F'(x)}$$

と定義する．極限

$$\lim_{x\to r}\frac{G(x)-r}{(x-r)^2}$$

を求めよ．

第3問

与えられた n 個の正の整数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

を "均等に" m 個のグループに分割する方法を考える．ここで，"均等に" とは，各グループに属する数の和を求めたときに，それらの最大値が小さくなることであると定義する．より正確には，n 個の要素の m 分割とは，

$$\begin{aligned} &G_1 \cup \cdots \cup G_m = \{1, 2, \cdots, n\}, \\ &i \neq j \Rightarrow G_i \cap G_j = \emptyset \end{aligned}$$

となるような集合の並び $(G_1, \cdots, G_m)$ のことである．ただし，$\emptyset$ は空集合を表す．$X \subset \{1, \cdots, n\}$ に対し，$\sigma(X)$ を，

$$\sigma(X) = \sum_{k \in X} a_k$$

と定義する．つまり，$\sigma(X)$ は X の要素を添え字とするような a_k 全ての和を表す記号である．分割 $\Delta = (G_1, \cdots, G_m)$ に対し，$P(\Delta)$ を，

$$P(\Delta) = \max_{i \in \{1, \cdots, m\}} \sigma(G_i)$$

で定める．目標は与えられた $(a_1, \cdots, a_n)$ および m に対して，$P(\Delta)$ をなるべく小さくする Δ を見つけることである．このために，m 個の集合を用意し，それらに要素を $a_1, \cdots, a_n$ の順番で，その時の和が最も小さい集合に加えていく，次のような方式を考えて分析しよう．より正確には，

(a) $G_1^0 = G_2^0 = \cdots = G_m^0 = \emptyset$ とする．

(b) G_i^{l-1} $(i = 1, \cdots, m)$ が定まったとき，G_i^l $(i = 1, \cdots, m)$ を以下のように定める．$\sigma(G_i^{l-1})$ $(i = 1, \cdots, m)$ を最小にする i (複数あればそのうちの任意の一つ) を x とし，

$$\begin{cases} G_x^l = G_x^{l-1} \cup \{l\}, & \\ G_i^l = G_i^{l-1} & (1 \leq i \leq m, i \neq x) \end{cases}$$

とする．

(c) 上記 (b) を繰り返して $G_i^1, G_i^2, \cdots$ を計算し，G_i^n $(i = 1, \cdots, m)$ までを求め，分割 $(G_1, \cdots, G_m) = (G_1^n, \cdots, G_m^n)$ を解とする．

たとえば，$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (10, 20, 5, 6, 50)$, $m = 2$ として，上の手順を図示すると以下の表のようになる．

l	G_1^l	$\sigma(G_1^l)$	G_2^l	$\sigma(G_2^l)$
1	$\{1\}$	10	$\emptyset$	0
2	$\{1\}$	10	$\{2\}$	20
3	$\{1,3\}$	$10+5$	$\{2\}$	20
4	$\{1,3,4\}$	$10+5+6$	$\{2\}$	20
5	$\{1,3,4\}$	$10+5+6$	$\{2,5\}$	$20+50$

結果として，$\Delta = (\{1,3,4\},\{2,5\})$,

$$P(\Delta) = \max\{21,70\} = 70$$

となる．もちろん今の場合，最適な (つまり，$P(\Delta)$ を最小にする) 分割は，$\Delta_{\mathrm{opt}} = (\{1,2,3,4\},\{5\})$ であり，このとき，

$$P(\Delta_{\mathrm{opt}}) = \max\{41,50\} = 50$$

である．

以下では，与えられた $(a_1,\cdots,a_n)$ に対して，上で述べた方式を用いて得られた m 分割のひとつを $\Delta = (G_1,\cdots,G_m)$，最適な分割 ($P(\Delta)$ を最小にする Δ) のひとつを Δ_{opt} として，問いに答えよ．

(1) 任意の $i,j \in \{1,\cdots,m\}$ に対して，次式が成立することを示せ．

$$\sigma(G_i) - \sigma(G_j) \le \max\{\, a_1,\cdots,a_n \,\} \le P(\Delta_{\mathrm{opt}})$$

(2) 次式が成立することを示せ．

$$P(\Delta) \le \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} a_k + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\max\{\, a_1,\cdots,a_n \,\}$$

(3) 次式が成立することを示せ (ヒント: (1) または (2) の結果を用いるとよい)．

$$P(\Delta) \le \left(2 - \frac{1}{m}\right) P(\Delta_{\mathrm{opt}})$$

(4) 任意の m に対して，上式の等号が成立するような $(a_1,\cdots,a_n)$ が存在することを示せ．

第4問

行列 A を $n \times n$ 実対称行列とし, 関数 $\psi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $\psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}$ と定義する. ただし記号 $^\top$ は転置を表す. また $\boldsymbol{b}$ を n 次元実数ベクトルとする. 制約 $\|\boldsymbol{x}\|^2 = 1$ と $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} = 0$ のもとで $\psi(\boldsymbol{x})$ の極値 (極大値または極小値) を求める問題について議論する. ラグランジュ関数 $L(\boldsymbol{x}, \lambda, \mu)$ を $L(\boldsymbol{x}, \lambda, \mu) = \psi(\boldsymbol{x}) + \lambda(1 - \|\boldsymbol{x}\|^2) - 2\mu \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}$ と定義し, 集合 Ω を

$$\Omega = \left\{ (\boldsymbol{x}, \lambda, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{lcll} \partial L/\partial x_i & = & 0 & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \partial L/\partial \lambda & = & 0, & \\ \partial L/\partial \mu & = & 0 & \end{array} \right\}$$

と定義する. 下記の問題に答えよ.

(1) $\partial L/\partial \boldsymbol{x} = (\partial L/\partial x_1, \ldots, \partial L/\partial x_n)$, $\partial L/\partial \lambda$, $\partial L/\partial \mu$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき, $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \Omega$ ならば, $\overline{\boldsymbol{x}}$ は, 行列 A の固有ベクトルとなる事を示せ.

(3) 行列 A を, $a_{11} < a_{22} < \cdots < a_{nn}$ を満たす対角行列とし, $\boldsymbol{b}$ の要素は全て非ゼロとする. $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \Omega$ とする. 以下の問いに答えよ.

(3-1) $\partial L/\partial x_i$ を求めよ.

(3-2) 「$\overline{\mu} = 0$ かつ $\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \overline{\lambda} = a_{ii}$」が成り立たない事を示せ.

(3-3) 「$\overline{\mu} = 0$ かつ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \overline{\lambda} \neq a_{ii}$」が成り立たない事を示せ.

(3-4) 「$\overline{\mu} \neq 0$ かつ $\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \overline{\lambda} = a_{ii}$」が成り立たない事を示せ.

(4) 行列 A は $(a_{11}, a_{22}, a_{33}) = (2, 4, 6)$ を満たす 3×3 の対角行列とし, $\boldsymbol{b}^\top = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ とする. (3) の性質を用いて, Ω 中の点をすべて求めよ.

(5) 行列 A は零行列でない 4×4 の対角行列であり, $\boldsymbol{b}^\top = (0, 1, 1, 1)$ とする. このとき $\overline{\boldsymbol{x}}^\top = (1, 0, 0, 0)$ が極値を与える解とならない A の例を挙げよ. またその例において $\overline{\boldsymbol{x}}$ が極値を与えない事を示せ.

第5問

3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 中に, 任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ と任意の単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ がある. $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{e}$ のまわりに角 θ だけ回転させて得られるベクトルを $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^3$ とする. ただし, $\mathbf{R}^3$ の座標系は直交系かつ右手系であるとし, 角 θ は, $\boldsymbol{e}$ 方向に z 軸の正方向をとったとき, x 軸の正方向から y 軸の正方向に向かう回転方向（$\boldsymbol{e}$ 方向に進む右ねじの回転方向）を正とする.

(1) $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{e}$ に垂直であるとする. このとき, $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{e}$, θ を用いて表した式を導出せよ.

(2) $\boldsymbol{u}$ が任意の方向であるとする. このとき, $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{e}$, θ を用いて表した式を導出せよ.

(3) $\boldsymbol{e} = (l, m, n)^\top$, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ を与えたとき, 任意の $\boldsymbol{u}$ に対し上で定義した回転を $\boldsymbol{v} = T\boldsymbol{u}$ によって施せるものとする. 変換行列 T を l, m, n, θ を用いて表せ. ただし, ベクトルの右肩の $^\top$ は転置を表す.

第6問

N 個の同等なボールを，互いに区別することができる S 個の箱に分配する．

(1) 全ての分配の数を求めよ．

(2) 全ての箱に少なくとも 1 個のボールが分配されているという条件をつけた時の分配の数を求めよ．

(3) (1) の全ての分配が同じ確率で出現すると仮定する．今，ひとつの箱を選ぶ．その箱に入っているボールの数が n 個である確率 $P(n,N,S)$ を求めよ．また，有理数 r に対し，

$$\lim_{N,S\to\infty,\, N/S=r} P(n,N,S)$$

を求めよ (r と n の式で表せ)．

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)