数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成１６年８月２４日（火）　１０：００～１３：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
3. 答案用紙３枚が渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．
4. 答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
5. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
6. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
7. 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

第 1 問

時間 t の関数 $y_1,\ y_2,\ y_3$ に関する微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y_3/I_3 & -y_2/I_2 \\ -y_3/I_3 & 0 & y_1/I_1 \\ y_2/I_2 & -y_1/I_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

を考える．ただし，I_1, I_2, I_3 は正の定数とする．

(1) 方程式 $(*)$ が，次の二つの保存量を持つことを示せ：

$$L = {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2, \qquad K = \frac{1}{2}\Bigl(\frac{{y_1}^2}{I_1} + \frac{{y_2}^2}{I_2} + \frac{{y_3}^2}{I_3}\Bigr).$$

一般に，時間 t の関数 $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m)^\top$ に関する微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) \tag{$**$}$$

に対して，差分方程式

$$\frac{\boldsymbol{z}^{(n+1)} - \boldsymbol{z}^{(n)}}{h} = \boldsymbol{f}\Bigl(\frac{\boldsymbol{z}^{(n+1)} + \boldsymbol{z}^{(n)}}{2}\Bigr)$$

を陰的中点則による離散化方程式という．ここで，$h > 0$ は時間の離散化幅を表し，$\boldsymbol{z}^{(n)}$ は $\boldsymbol{z}(nh)$ の近似である．

(2) 方程式 $(*)$ を陰的中点則で離散化した方程式においても，(1) の $L,\ K$ が保存量であることを示せ．

(3) 方程式 $(**)$ において 2 次形式 $\boldsymbol{z}^\top C\boldsymbol{z}$ （ただし，C は対称行列）が保存量であるとき，陰的中点則による離散化方程式においても，$\boldsymbol{z}^\top C\boldsymbol{z}$ が保存量であることを示せ．

（注）方程式 $(*)$ は 3 次元空間における剛体の回転を表す方程式であり，$I_1,\ I_2,\ I_3$ は主慣性モーメントを表している．

第 2 問

平面 $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への滑らかな写像 T を，以下のように表す：

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち} \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

$T\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ を満たす $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ を不動点という．また，不動点 $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ における写像 T のヤコビ行列

$$J(\overline{x},\overline{y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},\overline{y}) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},\overline{y}) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(\overline{x},\overline{y}) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(\overline{x},\overline{y}) \end{pmatrix}$$

の固有値の絶対値がすべて 1 より小さいとき $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ は漸近安定，絶対値が 1 より大きな固有値がひとつでもあるとき $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ は不安定であるという．

(1) ヤコビ行列 $J(\overline{x},\overline{y})$ の行列式 $\det J(\overline{x},\overline{y})$ を横軸，トレース $\mathrm{tr}\, J(\overline{x},\overline{y})$ を縦軸とする平面において，不動点 $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ が漸近安定である領域を図示せよ．

(2) $f(x,y) = -ax^2 + y + 1$, $g(x,y) = bx$ であるとき，写像 T をエノン (Hénon) 写像という（ただし，a, b は 0 でない実パラメータであり $|b| < 1$ とする）．エノン写像の不動点を求めよ．また，求めた不動点の安定性とパラメータの値との関係を調べて，その結果を b を横軸，a を縦軸とするパラメータ平面上に図示せよ．

(3) エノン写像 T を，非線形写像 T_1, 線形写像 $T_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, および線形写像 $T_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の合成によって

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_3\left(T_2\left(T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right)$$

と表すとき，$T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を具体的に求めよ．また，$a = 1.4$, $b = 0.3$ であるとき，長

方形の領域 $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; -1 \leq x \leq 1,\ \ -0.1 \leq y \leq 0.1 \right\}$ が順次変換された領域 $T_1(A), T_2(T_1(A)), T_3(T_2(T_1(A)))$ を図示するとともに，その面積を求めよ．

(4) エノン写像 T が $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ の上への 1 対 1 写像（全単射）であることを示せ．

（注）写像 T によって，離散時間 n に関する力学系

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n),$$
$$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

が定義される．上で論じている不動点や安定性の概念はこの力学系を念頭においたものである．

第 3 問

ある物体の重さ μ を測定する実験を 2 回行って得られる観測値を X_1, X_2 とし，その標本平均を $\overline{X} = (X_1 + X_2)/2$ とする．測定の誤差 $X_1 - \mu$, $X_2 - \mu$ は独立に平均 0，分散 1 の正規分布にしたがうものとする．

(1) $Y = (X_1 - X_2)/2$ とおく．$\overline{X}$ と Y との同時確率分布を求めよ．

(2) 標本平均 $\overline{X}$ が与えられたもとでの X_1 の条件付期待値 $\mathrm{E}[X_1|\overline{X}]$ を求めよ．また，$\mathrm{E}[X_1|\overline{X}]$ の期待値と分散を求めよ．

(3) X_1, X_2 の関数 $f(X_1, X_2)$ を考える．$\overline{X}$ が与えられたもとでの $f(X_1, X_2)$ の条件付期待値 $\mathrm{E}[f(X_1, X_2)|\overline{X}]$ は μ に依存しない $\overline{X}$ の関数であることを示せ．

(4) $f(X_1, X_2)$ が μ の不偏推定量であるとき，$\mathrm{E}[f(X_1, X_2)|\overline{X}]$ は μ の不偏推定量となることを示せ．また， $\mathrm{E}[f(X_1, X_2)|\overline{X}]$ の分散は $f(X_1, X_2)$ の分散以下であることを示せ．

(5) 十分統計量とはどのような概念か，また，どのような性質をもつか，を簡単に説明せよ．

第 4 問

k 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ と，その添字の集合 $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ の部分集合 L に対して

$$C(L) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{x} < 0 \ \ (\forall i \in L), \quad \boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{x} > 0 \ \ (\forall j \in K \setminus L)\right\}$$

と定義する．ただし，$\boldsymbol{a}_i^\top$ は $\boldsymbol{a}_i$ の転置を表し，$K \setminus L$ は K の中で L に含まれない要素の集合を表す.

(1) $k = 3$, $n = 2$, $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ としたとき，$K = \{1, 2, 3\}$ の部分集合 L で $C(L)$ が非空となるものをすべて書き出せ.

(2) $n = 3$ とする．$C(L)$ が非空となる L の個数を $\ell(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ と書き，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を動かしたときのその最大値を $r_k = \max_{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k} \ell(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ とする．r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 の値を求めよ．また，r_k を k の関数として表せ.

(3) 任意の $L \subseteq K$ に対して $C(L)$ が非空であるならば，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ は線形独立であることを示せ.

(4) 逆に，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ が線形独立ならば，任意の $L \subseteq K$ に対して $C(L)$ が非空であることを示せ.

第 5 問

m と n を正整数とし，m は n に比べて十分に小さい(注1)とする．M を m 個のシンボルの集合とする．大きさ n の 1 次元配列 a のそれぞれの要素 $a[i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ には，一つのシンボルが格納されている．すなわち，$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $a[i] \in M$ である．配列 a の中には m 個のシンボルがすべて現れ，さらに同じシンボルはそのすべてが連続して現れる．したがって，ある $i < j$ に対して $a[i] = a[j]$ なら，$i+1 \leq k \leq j-1$ を満たすすべての整数 k に対して $a[i] = a[k]$ である．$a[i] \neq a[i+1]$ となる i を変化位置とよぶ．変化位置は $m-1$ 個ある．このとき，すべての変化位置を求めるための，時間複雑度が $\mathrm{O}(n)$ より小さいアルゴリズムを構成し，そのアルゴリズムの振る舞いと正しさを説明するとともに，その時間複雑度を評価せよ.(注2)

（注１）「m は n に比べて十分に小さい」とは，ある $\alpha < 1$ に対して $m = \mathrm{O}(n^{\alpha})$ が成り立つこととする．

（注２）シンボルはすでに配列 a に格納されているので，格納に要する時間は考えないものとする．また，配列の一つの要素を見るのに要する時間は n によらない定数とする．