

システム情報学専攻
修士課程入学試験問題
専門科目 システム情報学

平成26年8月19日(火) 10:00~13:00

出題される6問のうち、3問のみを選択して解答せよ。

注意事項

- (1) 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
- (2) 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあつた場合には申し出ること。ただし試験問題の内容に関する質問に対しては、原則として答えない。
- (3) 答案用紙3枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。必要ときは答案用紙の裏面も使用してよい。
- (4) 各答案用紙の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。氏名は書いてはならない。
- (5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
- (6) 解答に関係のない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
- (7) 問題の解釈に複数の可能性が考えられる場合は、適宜言葉の定義や条件等を付加して解答してよい。
- (8) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

選択した問題番号			
----------	--	--	--

上欄に選択した3つの問題番号を記入すること。

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第1問

時間 t に関する実数関数を $x(t)$ とするとき、そのフーリエ変換 $X(\omega)$ を以下で定義する。ここで ω は角周波数であり、 j は虚数単位である。

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

またこの逆フーリエ変換を以下で定義する。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $x(t)$ の自己相関関数 $r(p)$ が以下の式 (1) で与えられる時、すべての実数 p に対し $|r(p)| \leq r(0)$ であることを示せ。次に、 $r(p)$ のフーリエ変換 $R(\omega)$ を $X(\omega)$ を使って表すことで、ウィナー・ヒンチンの定理を証明せよ。また、 $R(\omega)$ が実数関数であることを示せ。更に、 $R(\omega)$ は、必ずしも原点 ($\omega = 0$) で最大値をとるわけではないことを示せ。

$$r(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+p)dt \quad (1)$$

- (2) $x(t)$ が以下で与えられる時、その自己相関関数のフーリエ変換 $R(\omega)$ を求めよ。ここで a は正の定数である。

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2a}} & , -a \leq t \leq a \\ 0 & , \text{その他} \end{cases} \quad (2)$$

上記で求めた関数 $R(\omega)$ の極小値を与える角周波数が $-\pi/a < \omega < \pi/a$ を除く範囲で周期的に現れることを示し、その周期を a を使って表せ。更に、極大値を与える角周波数は周期的か否かを説明せよ。

- (3) 信号 $x(t)$ をセンサで観測したところ、以下の式 (3) で与えられる信号 $\hat{x}(t)$ が得られた。ここで a, b は正の定数である。

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2a}} e^{-(t+a)^2/b} & , t < -a \\ \sqrt{\frac{1}{2a}} & , -a \leq t \leq a \\ \sqrt{\frac{1}{2a}} e^{-(t-a)^2/b} & , t > a \end{cases} \quad (3)$$

この $\hat{x}(t)$ に対して以下の周波数特性を持つフィルタを適用することを考える。ここで c_1, c_2 は実定数である。

$$F(\omega) = c_1 + jc_2\omega \quad (4)$$

フィルタ適用後の信号 $y(t)$ を示せ。特に $c_1 = 0$ かつ $b \rightarrow 0$ の時、上記のフィルタリングは時間波形のどのような情報を抽出しているか述べよ。

- (4) 信号のエネルギーが $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = 1$ のように規格化されているとする。そのもとで、以下で定義する $\Delta_{t\omega}$ を考え、時間・角周波数領域における局在度合を測る。

$$\Delta_{t\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x(t)^2 dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 d\omega \quad (5)$$

$x(t)$ が問い(2)の場合 ($x(t)$ は式(2)で与えられる) における $\Delta_{t\omega}$ を求め、それが有限の値ではないことを示せ。

- (5) $\Delta_{t\omega}$ が有限の場合を考える。時間・角周波数領域において、より局在する関数を求めるため、 $\Delta_{t\omega}$ の最小値を与える関数 $x(t)$ の条件を以下の手順に従って求める。

(a) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 d\omega$ を $x(t)$ の導関数 $x'(t)$ で表せ。

(b) 問い(a)の結果を式(5)に代入し、その下限を与える不等式を導出せよ。

(c) $\Delta_{t\omega}$ の最小値を与える関数 $x(t)$ を求めよ。

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第2問

図1, 2, 3は, 演算増幅器を用いた能動フィルタ回路や正弦波発振回路や発振回路の負荷回路を示す. 以下の問いに答えよ. ただし, すべての演算増幅器は理想的と仮定してよい.

- (1) 図1の回路1の, 入力電圧 V_{in} から出力電圧 V_{out} への伝達関数を求め, その振幅と位相の周波数特性を図示せよ.
- (2) 図1の回路1において, 可変抵抗 R_3 を0から R_1, R_2 よりはるかに大きな値まで十分ゆっくりと変化させた. 能動フィルタの直流利得と遮断周波数(コーナ周波数)はどのように変化するか.
- (3) 図2の回路2は, 図1の回路1と同一の回路を3段のループ状に結合した回路を示す. この回路が正弦波発振回路として動作するための利得条件と周波数条件とを, 抵抗 R_1, R_2 , 可変抵抗 R_3 , 容量 C を用いて表せ. 次に, $R_3 = 0$ の場合に利得条件が満たされるように R_1, R_2 を選んだ上で, R_3 を0から R_1, R_2 よりはるかに大きな値まで十分ゆっくりと増加させたとき, 発振状態はどのように変化するか.
- (4) 図2の回路2が定常振幅の正弦波発振回路として動作している状況において, 3本の出力電圧 $V_{out1}, V_{out2}, V_{out3}$ の波形は互いにどのような関係をもつか. 次に, それらの電圧を, 図3に示すような同一の抵抗値をもつ3個の負荷抵抗 R_L のそれぞれの一端に接続し, 他端を1点で結合した. この結合点の電圧 V_n と, それぞれの負荷抵抗 R_L の瞬時消費電力の時間波形, およびそれら3つの瞬時消費電力の総和の時間波形とを求めよ. ただし, 時刻 $t = 0$ における V_{out1} の振幅を A , 位相を0とする.

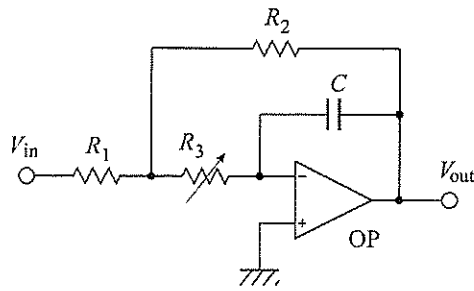
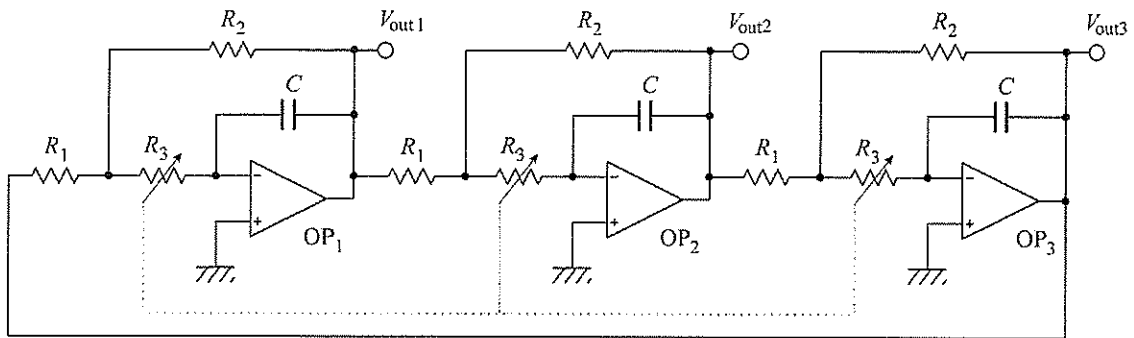


図 1 回路 1



(点線は可変抵抗の抵抗値が同期して変化することを示す)

図 2 回路 2

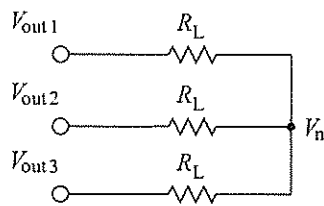


図 3 回路 3

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第3問

フィードバック制御の難易度が制御対象の観測量の選択に左右されることを、図1の倒立振子の制御を例に考えよう。図1のように質量 M [kg] の球が長さ ℓ [m] の棒の一端に固定されており、棒の他端は、地面に設置された x - y 平面内で回転する軸に接続されている。また図1に各々示される向きに、棒の鉛直上方向 (y 軸正の方向) からの振れ角を θ [rad], 回転軸での摩擦によって生じる回転速度に比例したトルクを $\kappa \frac{d\theta}{dt}$ [N·m], 回転軸に外部より加えられるトルクを u [N·m], 球に鉛直下向き (y 軸負の方向) にかかる重力の重力加速度を g [m·s⁻²] とする。以下の問いに答えよ。ただし $M = (2.45)^{-2}$ kg, $\ell = 2.45$ m, $\kappa = 3$ N·m·rad⁻¹·s, $g = 9.8$ m·s⁻² とする。

- (1) (a) 倒立振子の運動方程式が次で与えられるものとする。

$$M\ell^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = M\ell g \sin\theta - \kappa \frac{d\theta}{dt} + u$$

ここで (u, θ) を入出力とするシステムを P_1 , $(u, \frac{d\theta}{dt})$ を入出力とするシステムを P_2 とする。 P_1, P_2 を $|\theta| \ll 1$ の範囲で線形近似し、その伝達関数 $P_1(s), P_2(s)$ をそれぞれ求めよ。

- (b) $P_1(s), P_2(s)$ それぞれの極および零点の配置を複素平面上に図示せよ。
 (c) $P_1(s), P_2(s)$ それぞれのナイキスト線図の概形を、実軸との関係に注目して描け。また実軸と交わる点があればその座標も示せ。

- (2) 次に図2のフィードバック系を考える。以下の問いに答えよ。

- (a) $C(s) = K$ (K は正の実数) とする。システム P の伝達関数が問い(1)-(a)の $P(s) = P_1(s), P(s) = P_2(s)$ のそれぞれの場合について、図2のフィードバック系が安定化可能かどうかを、ナイキストの安定判別法を用いて答えよ。また可能である場合、 K についての条件を答えよ。

- (b) $C(s) = \frac{K}{s+\alpha}$ (K, α は正の実数) とする。システム P の伝達関数が問い(1)-(a)の $P(s) = P_1(s), P(s) = P_2(s)$ のそれぞれの場合について、図2のフィードバック系が安定化可能かどうかを、ラウス・フルビッツの安定判別法を用いて答えよ。また可能である場合、 K, α についての条件を答えよ。

- (3) 一般のプロパーな $P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$, $C(s) = \frac{a(s)}{b(s)}$ の場合を考える。ただし $n(s), d(s), a(s), b(s)$ はそれぞれ s の多項式とし、 $n(s)a(s)$ と $d(s)b(s)$ は既約とする。図2のフィードバック系が漸近安定である場合について以下の問いに答えよ。

- (a) 関数 $n(s)a(s) + d(s)b(s)$ は, s の実軸上の領域 $0 \leq s$ において同符号でなければならないことを説明せよ.
- (b) $P(s)$ の相対次数を1とする. $n(s)$ が s の実軸上の領域 $0 \leq s$ に零点 $z (< \infty)$ をもつとき, $d(s)b(s)$ は実軸上の領域 $z < s < \infty$ に偶数個の零点 (0個の場合も含む) をもつ必要があることを説明せよ.
- (4) システム P の伝達関数を問い(1)-(a)の $P(s) = P_2(s)$ とし, また $C(s) = \frac{K}{s+\alpha}$ (K, α は実数) とする.
- (a) 問い(3)-(b)の条件が満たされるための α についての条件を示せ. またそのことの意味について制御工学的見地から説明せよ.
- (b) $\alpha = -2$ とする. 図2のフィードバック系が漸近安定であるための, K についての条件を示せ.

【次のページへ続く】

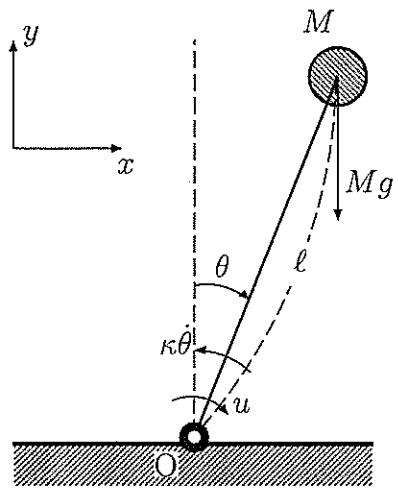


图 1

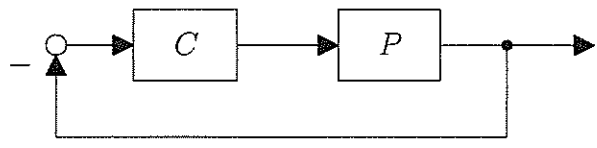


图 2

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

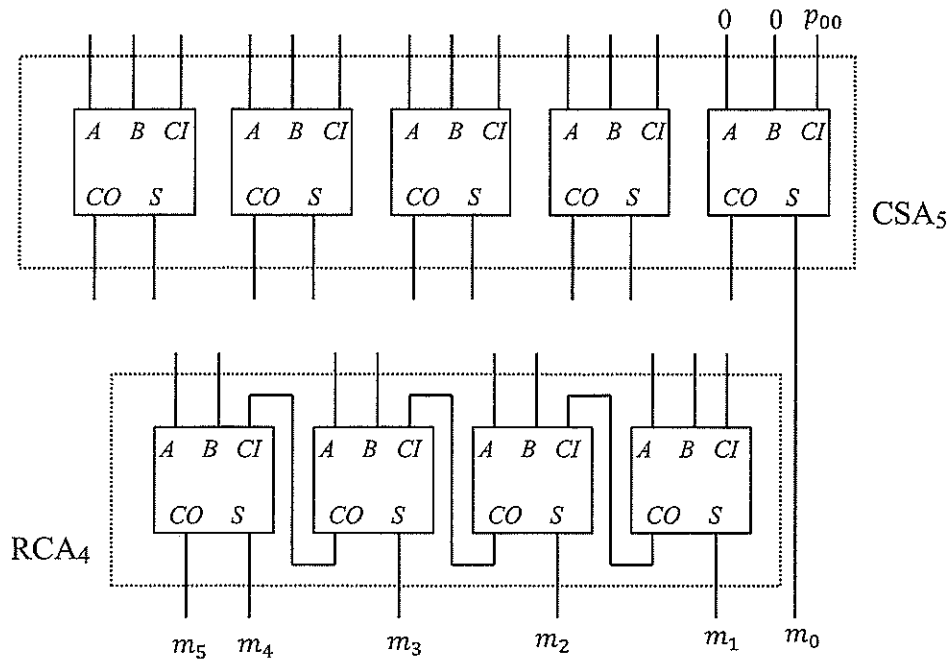


図 2

- (3) 問い(2)の構成方法を拡張することで、6ビットの2進数 $x_5x_4x_3x_2x_1x_0$ と $y_5y_4y_3y_2y_1y_0$ の乗算器を、1つのRCAと1つ以上のCSAを用いて実現する。ただし、RCAとCSAのビット数はそれぞれ任意であり、必要な p_{ij} はあらかじめ生成されているとする。
- (a) できるだけ少ない数のFAでこの乗算器を実現し、その構成を示せ。解答ではRCA、CSA内のFAを示す必要はないが、各RCAとCSAのビット数と入出力、およびそれらの接続関係がわかるようにすること。
- (b) この乗算器の入力から出力までの経路の中で、1つの経路が通過するFAの数の最大値を求めよ。

次に、2の補数表現された符号有り3ビットの2進数同士の乗算を考える。乗算結果は6ビットなので、最初から符号有り3ビットの2進数を符号有り6ビットの2進数に拡張してから乗算を行い、下位6ビットを乗算結果とすればよい。

- (4) 2の補数表現では、符号有り3ビット2進数 $x_2x_1x_0$ と符号有り6ビット2進数 $x_2x_2x_2x_2x_1x_0$ は等しいことを説明せよ。

【次のページへ続く】

- (5) 図3に示す計算で6ビットの乗算結果 $m_5m_4m_3m_2m_1m_0$ を得ることができ
る. しかしこの計算では複数回加算される値がある. このことを利用して,
FA の数ができるだけ少ない乗算器を実現する.
- (a) 図3と図4の乗算結果 $m_5m_4m_3m_2m_1m_0$ が等しいことを示せ. ただし,
 $\overline{p_{ij}}$ は p_{ij} の否定である.
- (b) 図4の計算でもまだ複数回加算される値があるため, さらに簡単な計算
方法があるかもしれない. このことを考慮し, 1つのRCAと1つ以上の
CSAを用いて, FAの数ができるだけ少ない乗算器の構成を示せ. ただ
し, RCAとCSAのビット数はそれぞれ任意であり, 必要な p_{ij} と $\overline{p_{ij}}$ は
あらかじめ生成されているとする. 解答ではRCA, CSA内のFAを示す
必要はないが, 各RCAとCSAのビット数と入出力, およびそれらの接
続関係がわかるようにすること.
- (c) この乗算器の入力から出力までの経路の中で, 1つの経路が通過するFA
の数の最大値を求めよ.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & x_2 & x_2 & x_2 & x_2 & x_1 & x_0 \\
 \times & y_2 & y_2 & y_2 & y_2 & y_1 & y_0 \\
 \hline
 & p_{20} & p_{20} & p_{20} & p_{20} & p_{10} & p_{00} \\
 & p_{21} & p_{21} & p_{21} & p_{11} & p_{01} & \\
 & p_{22} & p_{22} & p_{12} & p_{02} & & \\
 & p_{22} & p_{12} & p_{02} & & & \\
 & p_{12} & p_{02} & & & & \\
 + & p_{02} & & & & & \\
 \hline
 m_5 & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & m_0
 \end{array}
 \end{array}$$

図3

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & x_2 & x_2 & x_2 & x_2 & x_1 & x_0 \\
 \times & y_2 & y_2 & y_2 & y_2 & y_1 & y_0 \\
 \hline
 & & & & \overline{p_{20}} & p_{10} & p_{00} \\
 & & & & \overline{p_{21}} & p_{11} & p_{01} \\
 & & & \overline{p_{22}} & p_{12} & p_{02} & \\
 & p_{22} & p_{12} & p_{02} & & & \\
 & p_{12} & p_{02} & & & & \\
 & p_{02} & & & & & \\
 + & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 m_5 & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & m_0
 \end{array}
 \end{array}$$

図4

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第5問

質量 m の質点があり，質量 M ，半径 R の地球の周りを運動する．地球の中心 O を世界座標系の原点とし，原点を含む平面上に極座標をとり質点の位置座標を (r, θ) として，この平面上で質点の運動を考える．地球と質点の間には万有引力 GmM/r^2 (G は万有引力定数) のみが働き，両者にそれ以外の力は働かないものとする．また $M \gg m$ で地球と質点からなる系の重心は地球の中心と一致するとしてよい．空気抵抗は無視でき，地球は球形で自転しないものとして，以下の問いに答えよ．

- (1) 図1に示すように，地球の中心を原点とした質点の位置ベクトルを \mathbf{r} とし， \mathbf{r} 方向（動径方向），および，それと直角な方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{e}_r ， \mathbf{e}_θ とする．このとき，極座標系における質点の運動方程式を求め，

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad (1), \quad 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \quad (2)$$

であることを示せ．また，その結果から， $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ は一定値となることを示せ．

以下では，この一定値を $h (\neq 0)$ とする．

問い(1)の2つの微分方程式(1)，(2)から，質点の (r, θ) は極座標系における楕円の式： $r = l/(1 + \varepsilon \cos\theta)$ を満たし， $l = h^2/(GM)$ となることが証明されている．このことは成り立つとして以下の問いに答えよ．ただし楕円のパラメータについては図2を参照せよ．

- (2) 質点が (r, θ) にある際の，運動エネルギー，および万有引力による位置エネルギーの両者を合わせたエネルギー E は， θ によらず $-GmM/(2a)$ となり，保存されることを示せ．ただし a は質点の楕円軌道の長軸半径であり，万有引力による位置エネルギーは無遠くで0をとるものとする．
- (3) 図3に示すように，この質点を地表の点 $P(R, \theta_p)$ から打ち出し，打ち出した後は質点に働く力は地球の万有引力のみとする．このとき，質点の楕円軌道の長軸半径 a は，打ち出し初速度の大きさによって決まり，打ち出す角度には依存しないことを示せ．また，地表から打ち出した質点が（地球の半径と同じ）半径 R の円軌道を周回する際の打ち出し速度を v_β とするとき，打ち出し速度が κv_β （ただし $0 < \kappa < 1$ ）のときの a の値を求めよ．

(4) 問い(3)において、 $\kappa = \sqrt{6}/3$ であるとき、点Pで打ち出した質点がふたたび地表の点Qに落下するまでに到達しうる測地線距離（点Pと点Qを結ぶ地表面上での最短の曲線の長さ）の最大値を求めよ。

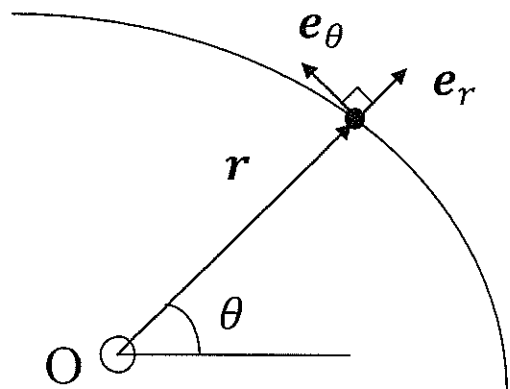
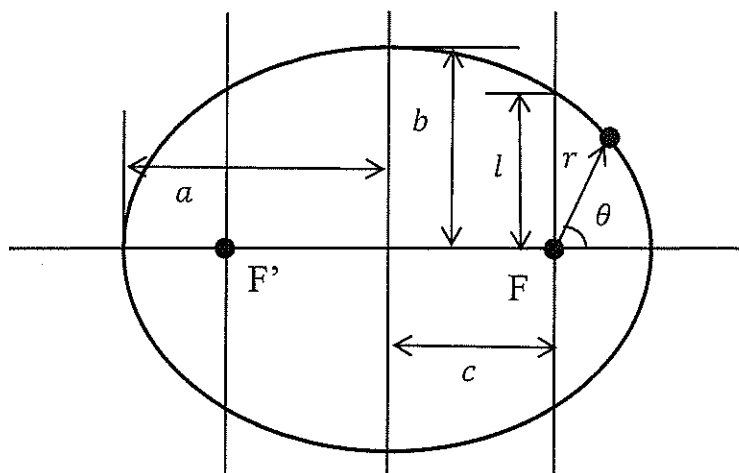


図 1



a : 長軸半径
b : 短軸半径
F, F' : 焦点
$l = a(1 - \varepsilon^2)$: 半直弦
r : 動径
$\varepsilon = c/a$: 離心率

図 2

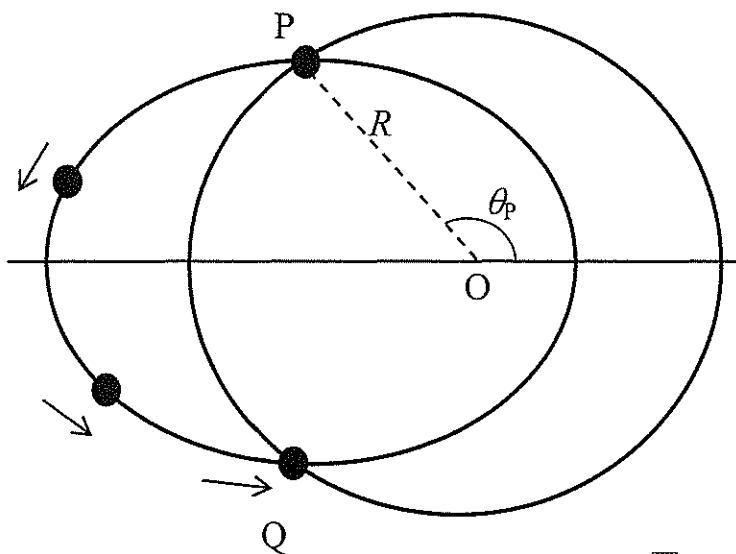


図 3

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第6問

以下の問いに答えよ。

- (1) 図1に示すような x - z 座標系をとり、誘電体である媒質1から媒質2にむけて式(1)の電界で与えられる単色光平面波を平坦な界面 P_1 ($z=0$) に対して垂直に入射させた。ただし、媒質1と媒質2の真空に対する比誘電率はそれぞれ ϵ_1 と ϵ_2 ($\epsilon_1 < \epsilon_2$) であり、比透磁率 μ はすべての媒質において1である。

$$E_0(t, x, z) = A \exp\left(j\omega\left(t - \frac{z}{v_1}\right)\right), \quad v_1 = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_1 \mu}}, \quad (z < 0) \quad (1)$$

ここで、 A は電界の振幅、 t は時間、 ω は光の角周波数、 c_0 は真空中での光の速度、 j は虚数単位である。界面 P_1 における振幅透過率 T_0 と振幅反射率 R_0 を求めよ。ただし、本問では界面 P_2 ($z=h$) での反射は考えなくてよい。すべての条件は、 x - z 平面に対して垂直の方向には一様である。

- (2) 問い(1)において、界面 P_1 、 P_2 での多重反射を考慮した場合、界面 P_1 における入射光の電界の振幅に対する界面 P_2 ($z=h$) における出射光の電界の振幅の比 T_{12} は式(2)で表される。式(2)を導出せよ。

$$T_{12} = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}}\right)^2}{1 - \left(\frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}}\right)^2 \exp(j\delta)} \exp\left(j\frac{\delta}{2}\right), \quad \delta = -\frac{4\pi}{\lambda_0} h \sqrt{\epsilon_2} \quad (2)$$

ここで、 $\lambda_0 = 2\pi c_0 / \omega$ であり、界面 P_1 と界面 P_2 は平坦で互いに平行である。

- (3) 問い(2)において、 T_{12} の絶対値が最大となる条件を厚さ h に関して求めよ。

- (4) 図2に示すように、問い(1)における媒質2でできた光学薄膜を考える。光学薄膜には、透過部 $S_1(-w < x < 0)$, $S_2(0 \leq x < w)$ と、透過率0の遮光部 ($x \leq -w, x \geq w$)がある。透過部 S_1, S_2 における媒質2の厚さはそれぞれ h_1, h_2 ($h_1 < h_2$)であった。問い(1)における媒質1の中に光学薄膜をおき、式(1)の電界で与えられる単色光平面波を光学薄膜に対して垂直に入射させた。このとき界面 P_5 において、透過部 S_1 と S_2 を透過する光の電界の振幅の絶対値がそれぞれ最大になり、なおかつそれらの位相差が π の奇数倍になる条件を求めよ。またこのとき、界面 P_5 における出射光の電界のエネルギー分布の特徴を述べよ。ただし各透過部の界面 $P_3(z=0)$, 界面 $P_4(z=h_2-h_1)$, および界面 $P_5(z=h_2)$ は x 軸に平行である。また電界の x 軸方向の伝搬は無視できるものとする。すべての条件は、 $x-z$ 平面に対して垂直の方向には一様である。

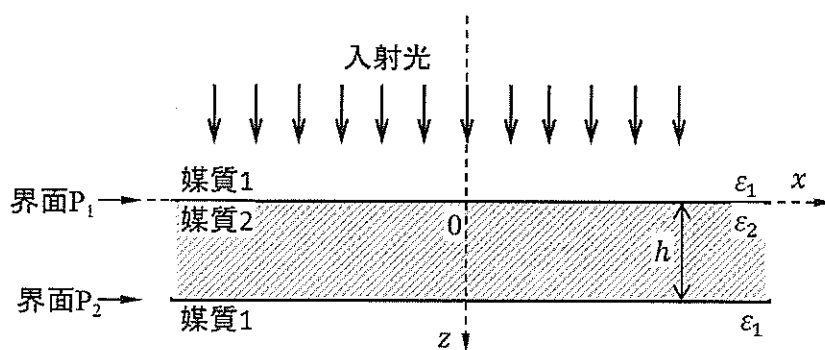


図1

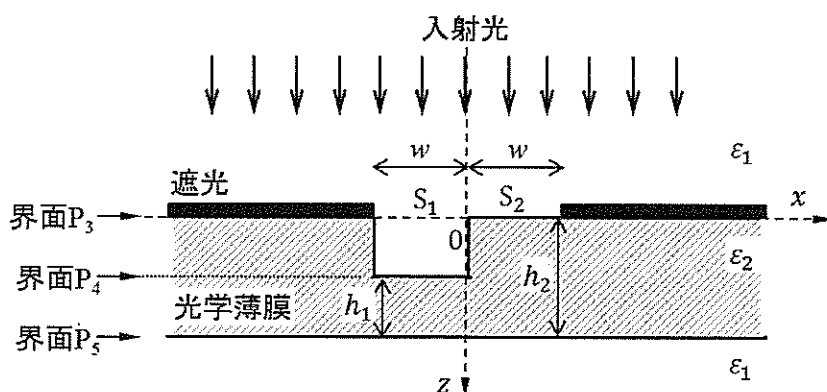


図2

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)